SAHUARUS
Revista Electrónica de Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Mayo, 2015, pp. 1–10.

Extensión de la regla de Sarrus para calcular la inversa de una matriz de orden 3×3

Enrique Cómer Barragán
Rogelio Cortez Acereto

Instituto Tecnológico de Tijuana, TecNM
e-mail: comer@cemati.org rogelio.cortez@tectijuana.edu.mx

Resumen

Se presenta una extensión o complemento a la conocida Regla de Sarrus, cuya estructura extendida nos permite calcular con facilidad la adjunta de una matriz de orden 3×3, y en consecuencia su matriz inversa, cuando existe. Se incluyen como ejemplos ilustrativos de la sencillez de su aplicación, problemas parametrizados y criptología básica.

1 Introducción

El uso de reglas mnemónicas en cálculos matemáticos frecuentes, nos permite tanto minimizar los errores así como reducir el espacio requerido para presentar los cálculos. Este es el caso del cálculo del determinante para una matriz de orden 3×3, mediante la llamada Regla de Sarrus[1], la cual no requiere del cálculo explícito de cofactores. El cálculo de la inversa de una matriz 3×3, normalmente se realiza mediante uno de dos métodos: (a) aplicación de la forma escalonada reducida por renglones a la matriz extendida $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ o bien (b) mediante la fórmula $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}$, donde la $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ requiere del cálculo explícito de la matriz de cofactores de $\mathbf{A}$ y posteriormente de su traspuesta. Presentamos un esquema que permite de manera sencilla, calcular la adjunta de una matriz 3×3 y por tanto la inversa de una matriz de dicho orden (ver [2] págs. 47-51).

2 Cálculo de la inversa de una matriz $\mathbf{A}_{3\times 3}$

Se presentan los esquemas mnemónicos para calcular $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de su determinante y adjunta. Primero recordamos la Regla de Sarrus y luego presentamos la extensión propuesta que nos permite calcular cómodamente, la adjunta de una matriz $A_{3\times 3}$, y en consecuencia su matriz inversa, cuando existe.

[1]Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) Matemático francés. Fue profesor de la Facultad de Ciencias en la Universidad de Estrasburgo. [3]

2.1 Regla de Sarrus: determinante de una matriz $\mathbf{A}_{3\times 3}$

Dada una matriz $\mathbf{A}_{3\times 3} = [a_{ij}]$, podemos calcular su determinante mediante *expansión por cofactores*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Realizando la distribución de términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Ordenando los términos y algunos factores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Es así como se obtiene la simplificación del método para calcular $\det(\mathbf{A})$ mediante la conocida *Regla de Sarrus*. Los términos positivos se calculan en base al esquema:

$$\begin{tikzcd} a_{11} \arrow[dr] & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} \arrow[dr] & a_{22} \arrow[dr] & a_{23} \\ a_{31} \arrow[dr] & a_{32} \arrow[dr] & a_{33} & \Rightarrow a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ a_{11} & a_{12} \arrow[dr] & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{tikzcd}$$

en tanto que los términos negativos como:

$$\begin{tikzcd} a_{11} & a_{12} & a_{13} \arrow[dl] \\ a_{21} & a_{22} \arrow[dl] & a_{23} \arrow[dl] \\ a_{31} & a_{32} \arrow[dl] & a_{33} \arrow[dl] & \Rightarrow -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \\ a_{11} & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{tikzcd}$$

2.2 Cálculo de la adjunta de una matriz $\mathbf{A}_{3\times 3}$

Con base en la matriz $\mathbf{A}$ se construye la matriz de cofactores $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Y dado que $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{M}^T$, se tiene

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Se observa que las entradas $\mathbf{M}^T_{12}$, $\mathbf{M}^T_{21}$,$\mathbf{M}^T_{22}$,$\mathbf{M}^T_{23}$ y $\mathbf{M}^T_{32}$ de la adjunta de $\mathbf{A}$ se pueden expresar con determinantes equivalentes:

$$\mathbf{M}^T_{12} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) = a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}$$

$$\mathbf{M}^T_{12} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}^T_{21} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$$

$$\mathbf{M}^T_{21} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}^T_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}$$

$$\mathbf{M}^T_{22} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{23}^T = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

$$\mathbf{M}_{23}^T = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{32}^T = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}$$

$$\mathbf{M}_{32}^T = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

Entonces $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ puede expresarse de la forma:

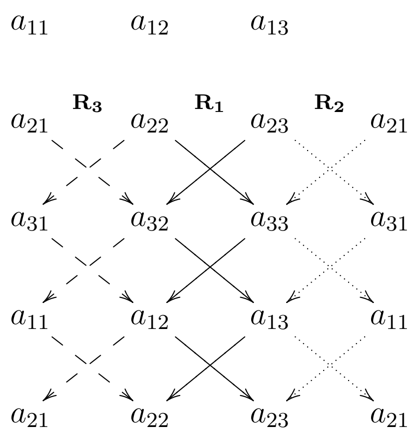
$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

2.3 Esquema mnemónico para calcular $\operatorname{adj}(\mathbf{A}_{3\times 3})$

Los cálculos de los determinantes implicados en la matriz adjunta definida previamente, pueden realizarse de forma estructurada, mediante lo que podemos llamar un *complemento o extensión a la Regla de Sarrus*, agregando a la matriz inicial, además de dos renglones de la Regla de Sarrus, una columna a la derecha, con los cuatro últimos números de la primer columna, conforme se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} & \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \end{array} \end{array}$$

Con dicha estructura, la $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ puede construirse directamente de la siguiente forma:



Con las columnas 2 y 3 del esquema anterior, calculamos los elementos del primer renglón de la adjunta, tomando grupos de cuatro elementos. Así, por ejemplo:

$$[\mathrm{adj}(A)]_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El resto de los elementos del primer renglón se calculan con los siguientes elementos de las mismas columnas 2 y 3 (en orden de arriba hacia abajo). Así obtenemos:

$$\text{Renglón 1 de } \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = [a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}, a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}]$$

de forma similar, con los elementos de las columnas 3 y 4, obtenemos:

$$\text{Renglón 2 de } \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = [a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}, a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}]$$

y con los elementos de las columnas 1 y 2, se obtiene:

$$\text{Renglón 3 de } \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = [a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}]$$

Una vez obtenidos $\det(\mathbf{A})$ y $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$, se calcula directamente la matriz inversa de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathrm{adj}(\mathbf{A})$$

3 Aplicaciones selectas

Se presentan problemas que ilustran la facilidad de los cálculos asociados a la inversa de una matriz $\mathbf{A}_{3\times 3}$, al utilizar la extensión propuesta. Las mismas soluciones podrían obtenerse por otros métodos para el cálculo de una inversa, pero se requeriría mayor número de pasos intermedios, así como espacio adicional para su presentación; además se elimina la necesidad de realizar divisiones (como se requiere normalmente al utilizar operaciones elementales de renglón). Aquí se asume que el contexto del problema implica realizar los cálculos paso a paso, de manera manual, por ejemplo, durante una clase frente al pizarrón, o bien en concursos académicos relacionados al tema.

3.1 Matriz inversa de un sistema con un parámetro

Calcular la matriz inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & t \\ 3 & t & 2 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz $\mathbf{A}$ es:

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & t \\ 3 & t & 2 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & t \end{matrix} \end{array} \to \det(\mathbf{A}) = 2 + t^2 - 3 - t^2 = -1$$

La adjunta de la matriz $\mathbf{A}$, utilizando la extensión a la *Regla de Sarrus* es:

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & t \\ 3 & t & 2 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \\ t \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & t \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ t \end{matrix} \end{array} \to \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 - t^2 & t & -1 \\ t & -1 & 0 \\ t^2 - 3 & -t & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz inversa resulta:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} t^2 - 2 & -t & 1 \\ -t & 1 & 0 \\ 3 - t^2 & t & -1 \end{bmatrix}$$

3.2 Criptología básica: cifrado de Hill

El *cifrado de Hill* emplea una matriz invertible para codificar un mensaje. Por ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

y una tabla que relaciona símbolos con claves

Símbolo	7	2	4	1	5	0	A	N	I	U	O	S	esp.
Clave	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Dado el mensaje codificado:

$$5SA00\ 5I74SO$$

Se invierte la matriz $\mathbf{A}$, primero calculando el determinante

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&1\\3&1&2\\3&1&3\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}1&0&1\\3&1&2\end{matrix}\end{array} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 3+3-3-2=1$$

Utilizando la *extensión de la regla de Sarrus* se calcula la adjunta:

$$\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1&0&1\\3&1&2\\3&1&3\end{bmatrix} & \begin{matrix}\\3\\3\end{matrix}\\ \begin{matrix}1&0&1\\3&1&2\end{matrix} & \begin{matrix}1\\3\end{matrix}\end{array} \Rightarrow \operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}1&1&-1\\-3&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

Entonces la matriz inversa resulta:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&-1\\-3&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

Con base en la tabla y el mensaje codificado se construye la matriz $\mathbf{M}_{\text{cod}}$.

Símbolo	7	2	4	1	5	0	A	N	I	U	O	S	esp.
Clave	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$$5SA00\ \ 5I74SO$$

$$\mathbf{M}_{\text{cod}} = \begin{bmatrix}4&5&4&2\\11&5&8&11\\6&12&0&10\end{bmatrix}$$

La codificación está dada por el sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_{\text{dec}} = \mathbf{M}_{\text{cod}}$$

Resolviendo

$$\mathbf{M}_{\text{dec}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}_{\text{cod}}$$

$$\mathbf{M}_{\text{dec}} = \begin{bmatrix}1&1&-1\\-3&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&5&4&2\\11&5&8&11\\6&12&0&10\end{bmatrix}$$

Con base en la matriz $\mathbf{M}_{\text{dec}}$,

$$\mathbf{M}_{\text{dec}} = \begin{bmatrix}9&-2&12&3\\-6&-3&-12&4\\-5&7&-8&-1\end{bmatrix}$$

nuevamente utilizando la tabla de referencia

Símbolo	7	2	4	1	5	0	A	N	I	U	O	S	esp.
Clave	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

se determina la matriz $\mathbf{M}$ equivalente módulo 13.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 & 3 \\ 7 & 10 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Símbolo	7	2	4	1	5	0	A	N	I	U	O	S	esp.
Clave	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$$\mathbf{Msje}. = \begin{bmatrix} U & S & \text{esp.} & 1 \\ N & O & 2 & 5 \\ I & N & 0 & \text{esp.} \end{bmatrix}$$

$$\text{Mensaje} \Rightarrow \textbf{UNISON 2015}$$

Para mayor información del tema, se sugiere revisar [1].

Detalle del proceso de encriptado:

Para encriptar o codificar el mensaje **UNISON 2015**, se construye la tabla que define la relación entre los números *clave* y los símbolos que éstos representarán. Una vez escrito el mensaje en la matriz (de dimensión $3 \times m$) se sustituyen los números *clave*:

$$\mathbf{Msje}. = \begin{bmatrix} U & S & \text{esp.} & 1 \\ N & O & 2 & 5 \\ I & N & 0 & \text{esp.} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 & 3 \\ 7 & 10 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Posteriormente, utilizando una matriz invertible $\mathbf{A}_{3\times 3}$ y con $\det(\mathbf{A}) = 1$ (para evitar inversos multiplicativos[2]), la cual se puede presentar en forma de clave o código de seguridad como 133011123, se construye la matriz codificada con el producto $\mathbf{AM}$:

$$\mathbf{AM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 & 3 \\ 7 & 10 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 18 & 17 & 15 \\ 50 & 57 & 47 & 37 \\ 58 & 64 & 52 & 49 \end{bmatrix}$$

Con base en la cual se contruye la matriz $\mathbf{M}_{\text{cod}}$, que es la matriz módulo 13 equivalente al producto $\mathbf{AM}$ y se sustituyen los símbolos para generar el mensaje en código:

$$\mathbf{M}_{\text{cod}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & 2 \\ 11 & 5 & 8 & 11 \\ 6 & 12 & 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 4 \\ S & 0 & I & S \\ A & \text{esp.} & 7 & O \end{bmatrix} \Rightarrow 5SA00\ \ 5I74SO$$

[2]Esta condición es sólo para fines de cálculo manual, en general puede ser distinto de 1, siempre y cuando existan los inversos multiplicativos módulo el tamaño de la tabla de símbolos.

3.3 Problema verbal parametrizado

Problema: Considere tres números tales que su promedio es 1, el promedio del primero y el tercero también es 1. Además la suma del tercero y m veces la suma de los dos primeros es 7. ¿Cuál es el rango de valores del tercer número cuando m cambia de 2 a 3?

Solución. Primero especificamos las ecuaciones que modelan el problema, considerando los números a, b, c en orden.

$$\begin{cases} \dfrac{a+b+c}{3} & = 1 \\ \dfrac{a+c}{2} & = 1 \\ m(a+b)+c & = 7 \end{cases}$$

Matricialmente, podemos entonces escribir:

$$Ax = B$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ m & m & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Aplicamos ahora el esquema mnemónico:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ m & m & 1 \end{bmatrix} & & \begin{array}{c} \\ 1 \\ m \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} & & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

y procedemos a calcular: $|A| = m + m - (m+1) = m - 1$. Entonces para $m \neq 1$, podemos encontrar A^{-1} como sigue:

$$A^{-1} = \frac{1}{m-1} \begin{bmatrix} 0-m & m-1 & 1 \\ m-1 & 1-m & 0 \\ m & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ya que sólo requerimos determinar los valores de c, para diferentes valores de m (en un rango de m donde $|A| \neq 0$), entonces utilizamos sólo el tercer renglón de A^{-1}. Para $m = 2$, obtenemos:

$$c_{m=2} = \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = -1$$

$$c_{m=3} = \frac{1}{3-1}\left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 7 \end{array}\right] = 1$$

Por tanto el rango de variación para c cuando m cambia de 2 a 3, es $[-1, 1]$

(obs. como $c_m = \dfrac{3m-7}{m-1}$, la función es monótona creciente en el intervalo indicado, por lo que c se mantiene en el intervalo señalado).

Conclusión

Se ha presentado un esquema sencillo para calcular la inversa de una matriz de orden 3×3 (cuando existe). Aún cuando dicho esquema es válido sólo para matrices de dicho orden (al igual que la Regla de Sarrus), se espera que por su sencillez logre ser de utilidad.

Agradecimientos

Primeramente al Dr. Manuel Cruz López por gestionar la evaluación de una primera versión del esquema presentado, a pesar de su sencillez. Al Dr. Martin G. García Alvarado quien motivó inicialmente (sin saberlo) la búsqueda de este esquema. Gracias también al comité organizador de la XXV Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas, con sede en la Universidad de Sonora, Hermosillo, por permitirnos compartir este sencillo esquema. Al Instituto Tecnológico de Tijuana-TecNM, por las facilidades brindadas y muy especialmente gracias a nuestras familias por su inspiración y apoyo constante.

Referencias

[1] Ángel Ángel, José de Jesús. "Criptografía: ejercicios de cifrado usando matrices" (2011). En MathCon: the mathematics firm Sitio web: `"http://www.math.com.mx/docs/cur/cur_1_002_Criptografia.pdf"` Acceso: 29 mayo, 2015.

[2] Rada, Juan. "Introducción al álgebra lineal". Universidad de los Andes, Consejo de Publicaciones (2011). Libro electrónico. Disponible en: `"http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/juan_rada/AlgebraLineal_JuanRada.pdf"`. Acceso: 29 mayo, 2015.

[3] Verdejo, Amelia "Pierre Frédérick Sarrus" En: Matemáticas en pie de igualdad (2014). `"http://igualmat.uvigo.es/wp-content/uploads/2014/01/PierreFredericSarrus_es.pdf"` Acceso: 29 mayo, 2015.